Ook de wiskundige heeft moeite met het taartsnijden

Kinderen zijn vaak (nog) niet aardig. Ze kunnen nog niet net doen of ze heel aardig zijn en een ander méér gunnen dan zichzelf. Op verjaardagen is de jarige zelf het goede slechte voorbeeld. De taart is de aanleiding. Midden op de taart ligt een kers. Moet je dat gezicht eens zijn als de jarige die NIET krijgt. Terwijl hij zijn deel van de taart eet kan hij zijn ogen niet afhouden van de kers die zijn nichtje pesterig lang op haar schoteltje laat liggen voor ze hem met een vuile grijns naar binnen wipt.

Denk niet dat een gladde geglazuurde taart waarop de bakker heel nauwkeurig lijntjes heeft getrokken om een eerlijke verdeling mogelijk te maken, minder problemen met zich mee brengt. Als het aantal taartpunten niet overeen komt met het aantal gasten kan de oorlog alsnog los barsten. Ook als het aantal punten *groter* is dan het aantal gasten. Dan houd je een punt over. En wie mag die? Oorlog dus!

En het gaat zelfs fout als er precies evenveel even grote punten zijn als er mensen aan tafel zitten. De een zou met gemak twee punten kunnen verwerken. De ander is het te veel en laat van zijn stuk taart een kwart staan om even te gaan overgeven. De taart is toch niet echt *eerlijk* verdeeld. Namelijk niet naar ieders *behoefte*.

Zeer geleerde mathematici, of wie dat liever hoort, wiskundigen generen zich niet om zo'n kinderpartijtje te redden. Integendeel. Het verdeelprobleem wordt serieus genomen.

Het verdelen van de koek tussen mensen die geen van allen precies een zelfde deel van die koek willen, dat kan. En eerlijk.

Iedereen tevreden

Het moet een buitengewoon bevredigend gevoel zijn om tenminste een keer in je leven tweede te zijn geworden in de Tour de France.

Van *eerste* worden spreken we maar niet.

Hoewel geleerde wiskundigen op straat niet worden herkend — nooit op de televisie geweest — moeten er onder hen figuren zijn die in een zelfde overwinningsroes leven.

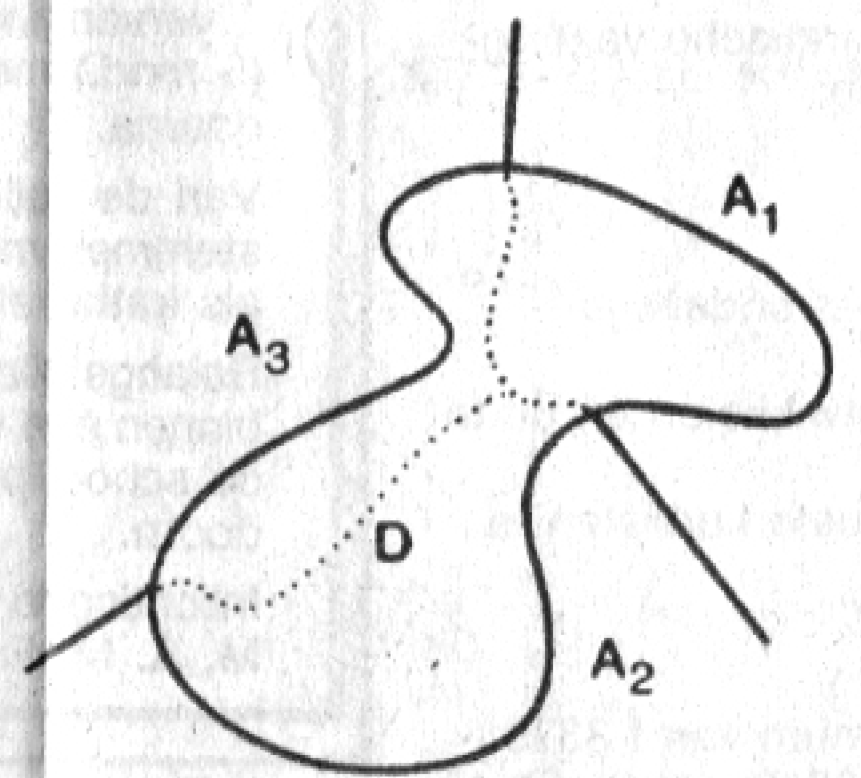
Professor dr T.P. Hill (39) van het Georgia Institute of Technology in Atlanta in de Verenigde Staten is zo'n iemand. Hij heeft *iets op zijn naam staan*. In het augustusnummer van het gezaghebbende tijdschrift The American Mathematical Monthly wordt zijn *Stelling* gepubliceerd. Die luidt, vrij vertaald, het is *altijd* mogelijk een gebied te verdelen onder aangrenzende landen, zodanig dat elk land *zelf* vindt dat het een evenredig deel van de totale waarde heeft gekregen, terwijl elk deel van het te verdelen gebied grenst aan het land dat het inlijft. Het klinkt reuze simpel. De moeilijkheid zit hem in het *precies even tevreden* stellen van elk land. Er is overeenkomst met het verdelen van taart, maar het is veel ingewikkelder. Taart hoeft niet te grenzen aan de verschillende personen die hem op eten.

Brood op plafond

Professor (Ted) Hill is in Nederland. Tijdelijk verbonden aan de Universiteit van Leiden. Hij is nauwelijks een jaar hier maar spreekt verbluffend goed Nederlands. En hij heeft er plezier in om ingewikkelde mathematische problemen uit te leggen aan de hand van huis-tuin-en-keuken voorbeelden.

Grinnikend zullen wiskundestudenten de samenvatting van een colloquium over *eerlijke verdelingsproblemen* hebben gelezen. Zo hield Hill onlangs een algemeen wiskunde colloquium op het Mathematisch Instituut van de Universiteit van Nijmegen. In de aankondiging: „Genoemd zullen worden de onderlinge verbanden en bewijzen van klassieke eerlijke verdelingsproblemen zoals o.a. *Het probleem van het cake snijden* en *Het boterhamprobleem*.

Definition. Open connected subsets A and B of $\mathbb{R}^2$ are *adjacent* if $\partial A \cap \partial B$ contains an open arc α (homeomorphic image of (0,1)) such that $A \cup B \cup \alpha$ is open and connected.



Suppose $D, A_1, \ldots, A_n$ are open connected regions in $\mathbb{R}^2$ with A_i adjacent to D for each i. If $\mu_1, \ldots, \mu_n$ are non-atomic probability measures on D and $p_i \geq 0$, $\Sigma^{n} p_i = 1$, then there exist disjoint open connected subsets $B_1, \ldots, B_n$ of D with B_i adjacent to A_i for all i, $\mu_i(B_i) \geq p_i$ for all i, and with $\overline{\cup B_i} = D$.

Een stuk te verdelen gebied, of het nu land is of zeebodem, kan eenvoudig worden verdeeld tussen aangrenzende landen als het plat is en objectief gezien op elk punt eenzelfde waarde heeft terwijl elk aangrenzend land er ook dezelfde waarde aan hecht. De oppervlakte moet worden berekend en het gebied wordt in gelijke vierkantsmaten gedeeld. Maar zo eenvoudig is het niet. Men moet er van uit gaan dat het gebied niet op elk punt van dezelfde waarde is en dat bovendien niet elk aangrenzend land het zelfde oordeelt over de waarde. Eenvoudige verschillen zouden kunnen zijn: het gebied bestaat uit een bosje, een plas en een berg. Een aangrenzend land heeft bergen genoeg en zou wel water willen, het ander wil bos en zelfs zou een land wel een berg kunnen gebruiken. Maar bos, berg en water worden niet door elk land als van „gelijke waarde" beschouwd. Ze zijn niet inwisselbaar. Het geheel aan factoren – en dat kunnen letterlijk alle mogelijke factoren zijn zoals landschappelijk schoonheid en religieuze waarde die aan een bepaald gebied wordt toegekend – moet worden vertaald in wiskundige termen. Dan eens kijken of er „uit te komen is". Professor Hill heeft het bewezen. Voor wiskundigen: hierbij zijn definitie en zijn stelling.

Boven een bordje omelet met brood in een Amsterdams eethuis legt Hill als een geduldige vader uit wat er in de loop der tijd al bedacht is om optimaal te verdelen, en wat hij er zelf aan heeft toegevoegd.

Stel je voor, je hebt een cake (of een krentenbrood, een makreel, een omelet enzovoort). Er zijn 3 personen. Ze hebben alle drie recht op een derde van de lekkernij. Als ze alle drie hetzelfde volume of gewicht wensen is het niet zo moeilijk. Met een weegschaal lukt het wel om iedereen vrijwel *evenveel* te geven. Maar de verschillende behoeften maken het pas een probleemgeval. Iedereen wil voor zich een derde, maar de een wil *minimaal* een derde van het gewicht (of meer). De ander wil *minimaal* een derde van het lekkerste gedeelte (waar de meeste rozijnen zitten of de meeste kruimeltjes truffel). Een derde is gek op korst en wil *minimaal* een derde van korst. Een geleerde Pool heeft dit verdeelprobleem ooit eens in wiskundige termen geformuleerd. Een ander Pool heeft een geniale oplossing bedacht.

Hill: „Het is makkelijk als je het ziet, maar heel moeilijk geweest om te vinden. Er komt geen scheidsrechter aan te pas en er hoeft niets van te voren te worden afgesproken.

Je neemt een mes en beweegt dat langzaam over de cake, makreel of omelet. Als het gedeelte dat door het mes is gepasseerd een van de drie eters bevalt zegt hij *stop*. Het mes snijdt het stuk af en vervolgt zijn weg. Van de liefhebbers die overblijven zegt er weer een *stop* als er een naar zijn wens goed stuk is gepasseerd. Wat overblijft is voor degene die geen *stop* gezegd heeft. Iedereen tevreden! Tenminste als alle drie de personen zuiver naar hun wens hebben gehandeld. Zeker is dat niet een van de drie een ander *benadelen* kan, hoe je het ook bekijkt. Je kunt gokken dat de anderen met minder genoegen nemen dan ze toekomt, zodat je als laatste met het grootste stuk overblijft. Maar als je gokt kun je juist ook iets verspelen. Een ijzersterke formule die op gaat voor meerdere personen".

Hill noemt de oplossing van dit verdeelprobleem *constructief*. Het is in praktijk te brengen.

Het boterhamprobleem is in *theorie* opgelost maar nooit uitgevoerd. Het is een *existentiële* oplossing.

Vraag: is het mogelijk om een boterham met boter en ham in tweeën te delen zo dat op beide helften evenveel boter en evenveel ham zit?

Antwoord: ja dat kan, zelfs als de boter niet op het brood maar op het plafond zit.

Je kunt ook zeggen, kunnen drie objecten in de ruimte door één en hetzelfde snijvlak alle drie in precies gelijke delen worden gedeeld? Er bestaat een sluitend, maar heel moeilijk bewijs dat dit kan. In theorie!

Brutale stelling

Tot nu toe kun je je afvragen of we niets beters te doen hebben. Maar Hill's bijdrage aan het universele eerlijke delen heeft, hoewel het nog *slechts* theorie is, wel degelijk betrekking op veel voorkomende bestaande problemen. Je kunt een om een te klein stuk taart pruilend kind gewoon een draai om zijn oren verkopen. Maar je speelt met vuur bij het onzorgvuldig verdelen van territorium. Het is nog een wonder dat we niet weer eens in oorlog zijn met Engeland of zo om de verdeling van het Continentaal Plat.

Hill heeft van de boterham- en taartverdelingsoplossingen en nog een paar wiskundige vondsten uit het verleden gebruik gemaakt en is tot een nieuwe brutale *stelling* gekomen dat grondgebied verdeeld kan worden onder aangrenzende landen, zonder dat iemand een zuur gezicht trekt.

Toen we hem uitlegden hoe in Nedeland boerenland wordt verkaveld zei Hill: „Ik durf te wedden dat bij elke verkaveling iemand *niet* tevreden is. Ik heb bewezen dat het *wel* naar ieders tevredenheid kan." Zijn stuk in The American Monthly eindigt echter als volgt: „Het zou misschien van belang kunnen zijn een praktische, constructieve methode te vinden voor eerlijke grensbepaling zoals beschreven in mijn stelling. Ik weet de constructieve oplossing niet."

We schieten er dus niet veel mee op?

Hill: „Wat ik wéét is dat er een manier bestáát."

WOUTER KLOOTWIJK